

文章编号: 1000-7598-(2008)11-2973-05

路基沉降预测的 Usher 模型应用研究

赵明华, 龙 照, 邹新军

(湖南大学 岩土工程研究所, 长沙 410082)

摘 要: 基于线性或近似线性加载情况下路基沉降过程和 Usher 曲线, 将广泛用于经济和资源预测的 Usher 模型应用于路基沉降预测。对 Usher 模型微分方程式的分析表明, 目前用于沉降预测的 Logistic 模型和 Gompertz 模型是 Usher 模型的两种简化形式, 但 Usher 模型对于实际情况具有更强的适应性。阐述了 Usher 模型参数的计算方法, 并结合某工程实例进行了计算分析, 对比结果说明 Usher 模型用于沉降预测的效果较好, 且比 Logistic 模型和 Gompertz 模型具有更高的预测精度, 可供工程应用参考。

关 键 词: 沉降预测; Usher 模型; Logistic 模型; Gompertz 模型

中图分类号: TU 47

文献标识码: A

Prediction of roadbed settlement by Usher model

ZHAO Ming-hua, LONG Zhao, ZOU Xin-jun

(Institute of Geotechnical Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Usher model, as a model for general prediction of petroleum economy and resources, is used to predict roadbed settlement based on the process of roadbed settlement under the linear or approximately linear loading and the characteristics of the Usher curve. Through analyzing the differential equations of the Usher model, it is pointed out that the Logistic model and Gompertz model used for settlement prediction of foundation at present are two simplified patterns, but to the actual condition, the applicability of the Usher model is better. The calculation methods of the parameters in Usher model are expounded; and they are applied to the calculation for an example; the comparison of results between the three models shows a good agreement, which indicates that the Usher model advised in predicting the subsoil settlement is reasonable. The example also indicates that the Usher model has a higher forecast accuracy and may be adopted in engineering practice.

Key words: settlement prediction; Usher model; Logistic model; Gompertz model

1 引 言

路基沉降是关系到道路安全性的一个重要指标, 路基沉降计算是岩土工程领域的重要研究课题之一。有关路基沉降的研究已有许多报道, 如基于固结理论并结合各种土的特性提出的计算路基最终沉降量的有限元法^[1]等。由于路基沉降影响因素的复杂性及参数选取的问题, 基于固结理论的沉降计算值往往与实测值差异较大, 有必要从前期的沉降数据预测后期的沉降以及最终沉降量。目前常用的方法有指数方程法、双曲线法^[2]、泊松曲线法、修正双曲线法、Asaokao 法、灰色预测法等。近些年来, Logistic 模型^[1, 3]和 Gompertz 模型^[4, 5]由于能

较好地反映全过程的沉降量与时间的关系, 即 S 型曲线关系, 得到越来越多的应用。虽然上述两种模型在实际应用中取得了一定成果, 但它们在模型结构上仍然存在一些不足。针对这些缺点, 本文应用经济和资源预测的 Usher 模型^[6-7], 进行路基沉降的预测, 通过对 Usher 模型的分析, 表明了 Logistic 模型和 Gompertz 模型为 Usher 模型的两种特殊形式, 且 Usher 模型对于实际情况具有更强的适应性, 结合工程实例证明了该模型的实用性和有效性。

2 线性荷载下路基沉降过程

根据土力学理论, 路基的总沉降分为: 瞬时沉降、固结沉降和次固结沉降三部分, 由于瞬时沉降

收稿日期: 2007-01-11

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863 计划)(No.2006AA11Z104)。

作者简介: 赵明华, 男, 教授, 博士生导师, 主要从事桩基础及特殊土地基处理等研究。E-mail: mhzhaohd@21cn.com

的存在, 沉降曲线不通过原点。固结沉降和次固结沉降随着荷载和时间的变化而变化, 路基线性加载过程中的沉降可以分为 4 个阶段: (1) 沉降量线性增长阶段: 加载初期, 土体尚处于弹性状态, 随着荷载的增加, 沉降量近似呈线性增加; (2) 沉降速率不断增加阶段: 随着荷载的不断加大, 土体的沉降量和沉降速率不断增大, 呈现出明显的非线性;

(3) 沉降速率递减阶段: 当加载不再增加时, 由于固结尚未完成及土体的流变, 沉降量将继续增加, 但沉降速率递减; (4) 沉降趋于稳定阶段: 理论上讲, 当时间趋于无穷大时路基沉降即达到稳定极限状态。

实际的岩土工程问题大都是线性加载或近似线性加载问题, 梅国雄等^[8-9]分别从一维固结理论和土体的应力-应变关系的角度出发, 证明了在线性加载或近似线性加载情况下沉降-时间曲线呈“S”型。由于 Usher 曲线能反映沉降随时间呈“S”型变化的数学特征, 因此可通过 Usher 曲线来拟合路基沉降随时间的变化规律。

3 预测模型的建立和分析

美国学者 Usher 于 1980 年提出了一个描述增长信息随时间变化的数学模型, 认为对于生命总量有限的某一体系而言, 在其自身发展过程中, 必存在一个成长、成熟直到死亡的全过程, 用微分方程表述为

$$\frac{dy}{ydt} = \frac{a}{b} \left[1 - \left(\frac{y}{y_m} \right)^b \right] \quad (1)$$

式中: y 为模型函数; a 为增长速度因子; b 为形状因子; y_m 为极限值。

对式 (1) 进行分离变量、积分, 整理后得^[8]

$$y = \frac{y_m}{\{1 + [(y_0 / y_m)^b - 1]e^{-at}\}^{1/b}} \quad (2)$$

式中: y_0 为初始值。

若设 $c = (y_0 / y_m)^b - 1$, 则式 (2) 可简化为

$$y = \frac{y_m}{(1 + ce^{-at})^{1/b}} \quad (3)$$

由式 (3) 可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, y 趋近于极限值 y_m , 从而描述了信息函数 y 随时间 t 的增长特征。由于地基的沉降量随时间的变化关系也属于增长曲线的类型, 所以沉降量可以表示为

$$s = \frac{s_m}{(1 + ce^{-at})^{1/b}} \quad (4)$$

式中: s 为沉降量 (mm); s_m 为最终沉降量 (mm); a 、 b 、 c 为待定系数; t 为时间 (d)。

(1) 当 $b=1$ 时, 由式 (4) 可得沉降预测的 Logistic 模型的表达式为

$$s = \frac{s_m}{(1 + ce^{-at})} \quad (5)$$

(2) 当 $b \rightarrow 0$ 时, 由式 (1) 经罗必塔法则求导后得

$$\frac{dy}{ydt} = -a \ln \left(\frac{y}{y_m} \right) \quad (6)$$

即为 Gompertz 模型的微分形式。对其积分整理可得到沉降预测 Gompertz 模型的标准形式为

$$s = s_m e^{-c \exp(-at)} \quad (7)$$

分析上述理论推导结果得出以下结论:

(1) 沉降预测的 Logistic 模型是 Usher 模型在 $b=1$ 时的简化形式, 而 Gompertz 模型是 Usher 模型在 $b \rightarrow 0$ 时的简化形式。

(2) 由式 (3) 可看出, 增长曲线呈“S”形状, 曲线中存在一个最大增长速度, 即存在一个拐点。由表 1 可知, Logistic 模型的拐点发生在 $s_m/2$ 处, Gompertz 模型的拐点发生在 s_m/e 处, 也就是说这 2 个模型的拐点只依赖于最终沉降量 s_m 。实际上, s_m 和拐点位置对曲线的形状起着重要的作用, 这说明 Logistic 模型和 Gompertz 模型不总是符合实际增长趋势变化规律。而 Usher 模型由于引入了一个参数 b , s_m 和拐点值的比例关系将随 b 值的变化而改变, 因而这种比例关系具有一定的弹性, 从而使 Usher 模型能更好地描述实测数据, 得到更高的拟合和预测精度。

表 1 3 种生长模型对比

Table 1 Comparison among three kinds of growth models

名称	模型	拐点沉降量
Logistic	$s = s_m(1 + ce^{-at})^{-1}$	$s_m/2$
Gompertz	$s = s_m e^{-c \exp(-at)}$	s_m/e
Usher	$s = s_m(1 + ce^{-at})^{-1/b}$	$s_m[2/(2-b)]^{-1/b}$

(3) 如果定义模型函数的增长率为 v , 即

$$v = dy / ydt \quad (8)$$

则由式 (1) 可得 Logistic 模型、Gompertz 模型和 Usher 模型增长率的变化速度分别为

$$\frac{dv}{ds_L} = -\frac{a}{s_m}; \quad \frac{dv}{ds_G} = -\frac{a}{s}; \quad \frac{dv}{ds_U} = -a \frac{s^{b-1}}{s_m^b} \quad (9)$$

由此可见, Logistic 模型增长率的变化速度为常数, Gompertz 模型增长率的变化速度与沉降量 s 成反比, Usher 模型增长率的变化速度取决于曲线的形状参数 b , 而 b 的取值是根据实测数据变化趋势加以确定的。从实际意义上讲, 增长率的变化速度既不是一成不变的, 也非一直下降, 因此, 从这个角度来说, Usher 模型比 Logistic 模型和 Gompertz 模型能更好地拟合实测数据, 对于实际情况具有更强的适应性。

4 模型的求解

由上述推导可知, 利用 Usher 模型进行沉降预测时首先须确定模型参数 a 、 b 、 c 及 s_m 。本文采用重复二元回归法^[7]来计算模型参数。

先将式 (1) 改写为

$$s = s_m \frac{(1+c)^b}{(1+c)^{b-1}} \left[\frac{1}{(1+ce^{-at})^b} - \frac{1}{(1+c)^b} \right] \quad (10)$$

对式 (10) 用 t 微分, 得到瞬时沉降为

$$s = \frac{ds}{dt} = s_m \frac{abc(1+c)^b}{(1+c)^b - 1} \frac{e^{-at}}{(1+ce^{-at})^{b+1}} \quad (11)$$

然后, 由式 (10) 和式 (11) 可推出

$$\left[\frac{(1+c)^b - 1}{(1+c)^b} \left(\frac{s}{s_m} \right) + \frac{1}{(1+c)^b} \right]^{\frac{b+1}{b}} s_t = s_m \frac{abc(1+c)^b}{(1+c)^b - 1} e^{-at} \quad (12)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{b+1}{b}; \quad C = (1+c); \quad D = a; \\ A &= \ln \left[s_m \frac{abc(1+c)^b}{(1+c)^b - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

对式 (12) 两端取对数可得

$$\ln s_t = A + B \ln \left[\frac{C-1}{C} \left(\frac{s}{s_m} \right) + \frac{1}{C} \right] - Dt \quad (14)$$

采用重复二元回归法求解式 (14) 的参数, 即

给不同的 s_m 、 C 组合, 对式 (14) 进行二元回归, 直到满足条件: 将求出的 s_m 、 C 、 B 和 D 代入式 (13) 得到的 A 值正好等于式 (14) 中二元回归的常数项 A 时的 s_m 、 C 、 B 、 D , 如有多解, 则提高迭代精度, 达到唯一解为止。然后, 根据式 (13) 求出 a 、 b 和 c 。

式 (11)、式 (12) 和式 (14) 中的 s_t 为地基瞬时沉降, 而实际观测到的数据为累计沉降量 s , 而且考虑到本模型要求原始数据为等时间间距, 实际工程中观测的数据很难满足这一要求。为此, 本文先采用光滑性较好的 3 次样条插值方法将原始沉降观测数据转化为等时间间距的数据序列, 再采用如下近似关系求取 s_t :

$$\left. \begin{aligned} s_t &= s'(t_{k+1}) - s'(t_k)/2; \\ s'(t_k) &= s(t_k) - s(t_{k-1}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

以上方法在计算机上不难实现, 笔者用 Matlab 编制了相应的计算机程序。

5 工程实例分析

宁一杭高速公路软土路基分布比较广泛, 为控制路基沉降量, 路基采用了等载预压、粉喷桩、土工格栅等。东南大学交通学院对溧阳段进行了沉降观测^[10], 其中 NH 标 k95+520 观测点的沉降观测资料如表 2 所列, 该断面地基处理采用预压加载方式。沉降观测从 2002 年 8 月 19 日开始到 2002 年 12 月 14 日止, 路堤填土分 8 级进行。累计填土高度为 5.70 m。现依据此工程中前 80 d 的沉降观测数据, 利用传统的对数转换并线性化, 拟合的 Logistic 曲线和 Gompertz 曲线分别为

$$\left. \begin{aligned} \hat{s}_{1t} &= \frac{10.45}{1 + 12.605 e^{-0.080 \ 9t}}; \\ \hat{s}_{2t} &= 10.621 e^{-2.760 \ 743 e^{-0.040 \ 85t}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

再按本文方法利用 Usher 沉降预测模型可得拟合的 Usher 曲线为

$$\hat{s}_{3t} = \frac{10.519}{(1 + 14.059 e^{-0.073 \ 78t})^{0.741 \ 8}} \quad (17)$$

根据上述 3 种模型计算出该工程 30~100 d 的沉降预测值和相对误差对比情况, 见表 2, 得出的沉降量与时间的关系曲线如图 1 所示。从图表中可以看出 Usher 模型对沉降的预测精度最高。

表 2 沉降观测值与预测值
Table 2 Settlement data by measured and predicted

时间 /d	观测值 /cm	Logistic 模型		Gompertz 模型		Usher 模型	
		预测值 /cm	相对误差 /%	预测值 /cm	相对误差 /%	预测值 /cm	相对误差 /%
30	5.35	4.945	-7.561	4.716	-11.844	5.273	-1.446
34	5.88	5.788	-1.557	5.329	-9.361	5.973	1.588
35	6.56	5.996	-8.593	5.479	-16.486	6.147	-6.290
40	7.48	6.987	-6.591	6.190	-17.240	6.990	-6.554
45	7.82	7.853	0.419	6.839	-12.567	7.755	-0.831
48	8.05	8.297	3.070	7.195	-10.626	8.164	1.413
50	8.38	8.561	2.155	7.418	-11.484	8.413	0.392
55	8.59	9.108	6.036	7.926	-7.734	8.951	4.206
60	8.84	9.515	7.634	8.366	-5.367	9.374	6.042
62	9.01	9.644	7.034	8.524	-5.400	9.514	5.591
65	9.18	9.807	6.828	8.742	-4.768	9.695	5.612
70	9.81	10.012	2.057	9.062	-7.624	9.933	1.252
75	10.04	10.153	1.130	9.331	-7.057	10.105	0.651
76	10.06	10.176	1.152	9.380	-6.761	10.134	0.731
80	10.11	10.250	1.387	9.557	-5.470	10.229	1.175
85		10.316		9.745		10.316	
90		10.360		9.901		10.378	
91		10.367		9.929		10.388	
100		10.410		10.137		10.451	

注：Logistic 预测数据和 Gompertz 预测数据均来源于文献[10]。

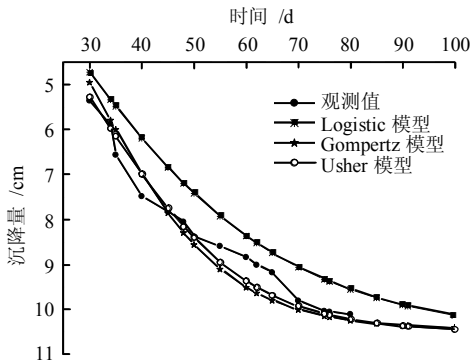


图 1 实测数据与预测曲线
Fig.1 Measured data and predicted curves

在曲线拟合过程中发现，上述 3 种模型对沉降早期的预测相对误差普遍偏大，后期拟合较好，但实际工程中一般多关注最终沉降量，故此影响不予考虑。在实际拟合过程中可以考虑将实测数据组的前几个观测值略去后再进行拟合，精度更佳。

以上分析表明，对地基沉降的预测，尤其是沉降后期的预测，Usher 模型可取得更为满意的结果。

6 结 论

(1) 在分析路基沉降规律和 Usher 曲线特征的基础上，本文针对常用的 Logistic 和 Gompertz 两种沉降预测模型的不足，提出将 Usher 模型应用于路基的沉降预测。

(2) 通过对 Usher 模型的微分方程进行深入分析，证明其可简化为常用的 Logistic 和 Gompertz 两种模型，并基于重复二元回归法提出了适用于路基沉降预测的 3 参数 Usher 模型。

(3) 工程实例对比分析结果表明，Usher 沉降预测模型较 Logistic 和 Gompertz 模型能更好地适应实际情况的变化，适用范围更广，且预测精度更高，具有一定的推广应用价值。

本文模型方法主要是就线性或近似线性加载情形而言的，对于非线性荷载情况下的路基沉降预测还有待进一步地研究探讨。

参 考 文 献

[1] 宰金珉, 梅国雄. 成长曲线在地基沉降预测中的应用[J]. 南京建筑工程学院学报, 2000, 53 (2): 8—13.
ZAI Jin-min, MEI Guo-xiong. Poission curve application to forecast the setting of foundation[J]. **Journal of Nanjing Architectural and Civil Engineering Institute**, 2000, 53(2): 8—13.

[2] SIEW-Ann TAN. Hyperbolic method for settlement in clays with vertical drains[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1994, 31(1): 125—131.

[3] 徐洪钟, 施斌, 李雪红. 全过程沉降量预测的 Logistic 生长模型及其适用性研究[J]. 岩土力学, 2005, 26 (3): 387—391.
XU Hong-zhong, SHI Bin, LI Xue-hong. Logistic growth model and its applicability for predicting settlement during the whole process[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(3): 387—391.

[4] 余闯, 刘松玉. 路堤沉降预测的 Gompertz 模型应用研究[J]. 岩土力学, 2005, 26 (1): 82—86.
YU Chuang, LIU Song-yu. A study on prediction of embankment settlement with the gompertz model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(1): 82—86.